ICARE A - SESSION 1999

MATHEMATIQUES 2

FILIERES TSI / ATS - Durée : 4 Heures

Notations

On rappelle que pour tout nombre complexe z la série de terme général $\frac{z^n}{n!}$ converge vers e^z

$$\text{On note } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

$\mathcal{M}_2$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients complexes on note :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \text{ une matrice de } \mathcal{M}_2$$

La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si et seulement si $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \\ \lim\limits_{n\to\infty} c_n = c \\ \lim\limits_{n\to\infty} d_n = d \end{cases}$

Pour A élément de $\mathcal{M}_2$ On pose $A^0 = I_2$, $S_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$ et si elle existe :

$$\lim_{n\to\infty} S_n(A) = \exp(A)$$

Préliminaire

Montrer que si une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers A ,et si P et P' sont deux matrices fixées de $\mathcal{M}_2$ alors les suites $(A_nP)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P'A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont pour limites respectives (AP)et $(P'A)$.
En déduire que si A_n et B_n sont semblables et que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers A et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers B alors A et B sont semblables .

PARTIE 1

Etude d'exemples

1°) Calculer , si elle existe , exp (A) pour :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ avec $a \neq c$.

2°) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres de A .
b) Déterminer les sous espaces propres .
c) En déduire que A est semblable à une matrice D que l'on déterminera.
d) Calculer exp (D).
e) En déduire que exp (A) existe et calculer son expression .
f) Comparer les valeurs propres de exp (A) et celles de A .

PARTIE 2

- A -

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{i \in \{1;2\} \\ j \in \{1;2\}}}$ une matrice de $\mathcal{M}_2$

1°) Montrer qu'il existe M réel positif tel que $\forall (i,j) \in \{1;2\} \times \{1;2\} \quad |a_{i,j}| \leq M$

($|a_{i,j}|$ désigne le module de $a_{i,j}$)

2°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, chaque terme de A^n est en module majoré par : $2^{n-1} M^n$
En déduire que la suite $S_n (A)$ associé à A est convergente , en déduire que pour tout A exp (A) existe .

1°) Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_2$ admet une ou deux valeurs propres dans C

2) On suppose que A possède deux valeurs propres distinctes a et b

a) Justifier l'existence d'une matrice P inversible telle que $A = P D P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

b) En déduire que l'on peut trouver deux matrices M et N telles que :

$$A = a M + b N$$

c) Montrer que M et N sont linéairement indépendantes .

d) Montrer que : $M + N = I_2$

e) Calculer M et N en fonction de a , b , A et I_2 .

f) Montrer que : $\forall n \in N \quad A^n = a^n M + b^n N$

3°) a) Montrer que si A possède une seule valeur propre a , alors elle est semblable à :

$$J_1 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad J_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

b) Montrer que si A admet comme seule valeur propre 0 alors pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $A^n = E$

c) Montrer que si A admet comme seule valeur propre a ($a \neq 0$) alors :

$$A^n = a^n I_2 + n a^{n-1} M \qquad \text{où} \qquad M = A - a I_2$$

4°) En déduire que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_2$ et pour tout entier positif n , A^n est combinaison linéaire de A et I_2 . (*On ne cherchera pas ici à expliciter cette combinaison*)

5°) a) Montrer que exp (A) est combinaison linéaire de A et I_2.

b) Calculer les coefficients de cette combinaisons linéaire (*On distinguera selon le nombre de valeurs propres de A*) .

6°) a) Soit $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ Calculer exp (D)

b) Soit $J_1 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ calculer exp (J_1)

En déduire les valeurs propres de exp (A) en fonction de celles de A .

c) Montrer que si A et B ne sont pas colinéaires à I_2 alors :

(exp (A) exp (B) = exp (B) exp (A)) si et seulement si (AB = BA) .